Pour une courbe de paramétrisation cartésienne $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ou d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$:
$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$, d'où $d\overrightarrow{M} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta}$

L'*abscisse curviligne* s est définie par : $(ds)^2 = \left\|d\overrightarrow{M}\right\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2$

On choisit $ds = \varepsilon \left\|d\overrightarrow{M}\right\|$ $(\varepsilon = \pm 1)$ de sorte à éviter les valeurs absolues.
La *longueur* de l'arc de courbe entre $M(t_1)$ et $M(t_2)$ $(t_1 \leqslant t_2)$ est donnée par :

$$L(t_1, t_2) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} |ds| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

Le *vecteur (unitaire) tangent* est $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{\varepsilon\left\|d\overrightarrow{M}\right\|}$,

de sorte que si $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ (vecteur vitesse) et $v = \dfrac{ds}{dt}$(vitesse algébrique) : $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{T}$.
Alors, les *angles tangentiels cartésiens et polaires* $\varphi = \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}\right)}$ et $\psi = \widehat{\left(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{T}\right)}$ $(\varphi = \theta + \psi)$ sont donnés par :

$$\boxed{\overrightarrow{T}\left|\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{dx}{ds} \\ \sin\varphi = \dfrac{dy}{ds} \end{array}\right._{/(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} \left|\begin{array}{l} \cos\psi = \dfrac{d\rho}{ds} \\ \sin\psi = \rho\dfrac{d\theta}{ds} \end{array}\right._{/(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta})} \quad \tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\ ; \tan\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$$

Le *vecteur (unitaire) normal* est le vecteur normé directement orthogonal à $\overrightarrow{T}$:

$$\boxed{\overrightarrow{N} = \frac{d\overrightarrow{T}}{d\varphi}\left|\begin{array}{l} -\sin\varphi = -\dfrac{dy}{ds} \\ \cos\varphi = \dfrac{dx}{ds} \end{array}\right._{/(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} \left|\begin{array}{l} -\sin\psi = -\rho\dfrac{d\theta}{ds} \\ \cos\psi = \dfrac{d\rho}{ds} \end{array}\right._{/(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta})}}$$

$\left(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ est le *repère (mobile) de Frénet.*

Le *rayon de courbure* R_c*, inverse de la courbure* γ en M est donné par :

$$\boxed{R_c = \frac{1}{\gamma} = \frac{ds}{d\varphi} = \varepsilon\frac{\left\|\overrightarrow{OM}'\right\|^3}{\det\left(\overrightarrow{OM}', \overrightarrow{OM}''\right)} = \frac{v^3}{\det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\right)} = \frac{v^2}{a_N} = \varepsilon\frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = \varepsilon\frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \varepsilon\frac{\left(u^2 + u'^2\right)^{3/2}}{u^3\left(u + u''\right)}\left(u = \frac{1}{\rho}\right)}$$

$\left[\text{indication pour la démonstration : calculer} \det\left(\dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}, \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{ds^2}\right)\right]$
$R_c\varepsilon > 0$: tourne à gauche ; $R_c\varepsilon < 0$: tourne à droite ; changement de signe : inflexion.
Formules de Frénet : $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R_c}\ ;\ \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T} = -\dfrac{\overrightarrow{T}}{R_c}}$; de plus $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\varphi} = R_c\overrightarrow{T}$.
Calculs d'aire :
$S = \int_{t=t_1}^{t=t_2} ydx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ $\qquad S = \int_{t=t_1}^{t=t_2} xdy$ $\qquad S = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \dfrac{1}{2}\rho^2 d\theta$

$$S = \oint -ydx = \oint xdy = \oint \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \oint \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$